國立臺南第二高級中學
114學年度第一次教師甄選

數學科試題解答

作答注意事項

1. 本試題共兩部分：填充題 14 題，及計算證明 3 題，共計100分；
2. **作答限用藍色、黑色原子筆或鋼筆，請在答案本上依序填寫題號及答案。**
3. 本科(不)可以使用電子計算器。

第一部分： 填充題 (每題 5 分，共 70 分)

1. 在某場比賽中，五位評審各給出一個介於 1 到 10 之間的整數分數，並計算這五位評審所給出分數的算術平均數、中位數和眾數。已知五個分數的算術平均數為 7、中位數為 8 且眾數為 9，請找出所有可能的分數組合。

A：$\{2,7,8,9,9\}$ 或 $\{3,6,8,9,9\}$ 或 $\{4,5,8,9,9\}$

2. 試求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+4)^2}+\frac{n}{(n+8)^2}+\ldots+\frac{n}{(n+4n)^2}\right)=?$

A：$\frac{1}{5}$

3. 平面 E 通過$(2,-2,-1)$及$(4,-4,-3)$。若 $P(a,b,c)$在平面 E 上的投影點為 $Q(1,4,0)$，且$\overline{PQ}=6\sqrt{2}$，求 P 的坐標?

A：$(7,4,6),(-5,4,-6)$

4. 已知 A=$\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ 、 B=$\{a_1^2,a_2^2,a_3^2,a_4^2,a_5^2\}$ ， 其中 $a_i\in N$ ， $(i=1,2,3,4,5)$ 。 設 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$ 且 $A\cap B=\{a_1,a_4\}$，若 $a_1+a_4=10$，且 $A\cup B$ 元素之和為 224，求集合 A=？

A：{ 1 , 3 , 4 , 9 , 10 }

5. 85 藍歡慶營業一周年，凡買飲料超過百元者，皆贈送一張刮刮樂彩券。右圖為其中一種形式，此彩券共有 9 格，內有四個 1、三個 2、二個 3，玩法是從中任刮 2 格兌獎，否則作廢。若所刮 2 格的數字相同，則可得到此數字 72 倍之等價折價券；若所刮 2 格的數字相異，則只能領紀念品一份。今小胖拿到一張刮刮樂彩券，試問小胖刮得折價券金額之期望值？

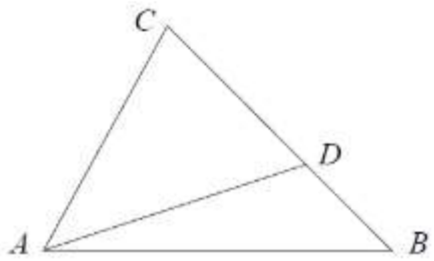
1	2	1
1	3	1
2	2	3

A：30 元

6. 求平面上滿足 $x^3y^2-x^2y^2-xy^4+xy^3\geq 0$ 且 $0\leq x\leq y$ 的區域面積？

A：$\frac{1}{4}$

7. 如圖， $2\angle BAC=3\angle ABC$ ，且 D 在$\overline{BC}$上，使得 $\angle DAC=2\angle DAB$ 。假設$\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$ ，$\overline{AB}=c$ ，$\overline{AD}=d$且 $\overline{CD}=e$。 請用 a、b 和 c 表示 d 和 e。求$(d，e)$＝？



A：$(\frac{bc}{a},\frac{b^2}{a})$

8. H 為$\triangle ABC$ 的垂心，$\cos B=\frac{3}{4}$、$\cos C=\frac{9}{16}$。若 $\overleftrightarrow{BH}$ 交 $\overleftrightarrow{AC}$ 於 E，且 $\overleftrightarrow{CH}$ 交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 F。求$\frac{\Delta AEF面積}{\Delta ABC面積}$ ＝？

A：$\frac{1}{64}$

9. 設複數$Z_1=-1+\sqrt{3}ai$，$Z_2=\frac{\sqrt{3}(a-1)}{3a+1}+i$，其中$a\in R$且$a\neq-\frac{1}{3}$。設複數$Z_3=\frac{Z_2}{Z_1}$，求$\mathrm{Arg}(Z_3)=$ ？

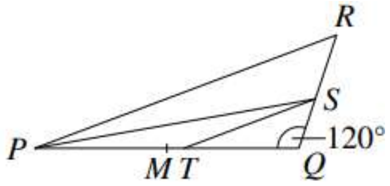
A：$a<-\frac{1}{3}$ 時，$\mathrm{Arg}(Z_3)=\frac{5}{6}\pi$；$a>-\frac{1}{3}$ 時，$\mathrm{Arg}(Z_3)=\frac{11}{6}\pi$

10. A triangle with interior angles 30° and 45°, and the radius of the circumcircle is 4. What is the area of the triangle?

A：$4+4\sqrt{3}$

11. George throws three unbiased dice and removes all of the dice that come up with a 5 or 6. Martha then throws the dice that remain, if any. Determine the probability that exactly one of Martha's dice shows a 5 or 6. A： $\frac{98}{243}$

12. In the diagram shown, M is the mid-point of PQ. The line PS bisects $\angle RPQ$ and intersects RQ at S. The line ST is parallel to PR and intersects PQ at T. The length of PQ is 12 and the length of MT is 1. The angle SQT is 120°. What is the length of SQ?



A：3

13. The first two terms of an infinite geometric sequence, in order, are

$$3log_3 x,\ 2log_3 x, \text{ where } x > 0.$$

The first three terms of an arithmetic sequence, in order, are

$$log_3 x, log_3 \frac{x}{3}, log_3 \frac{x}{9}, \text{ where } x > 0.$$

Let S_6 be the sum of the first 6 terms of the arithmetic sequence. Given that S_6 is equal to one third of the sum of the infinite geometric sequence, find x.

A：243

14. A geometric transformation T：$(x, y) \to (x', y')$ consists of three transformations in order：

- A rotation of θ radians $(0 \le \theta < 2\pi)$ about the origin, followed by
- An enlargement with scale factor 2, centred at the origin, followed by
- A translation of 1 unit right and 3 units down.

Given that the transformation T maps the point $\left(\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ to itself, find the angle θ of the rotation.

A：$\frac{\pi}{2}$

第二部分：計算證明題 (每題 10 分，共 30 分)

1. 已知 n 為任意正整數時，數列$\langle a_n \rangle$的前 n 項和S_n使得$\dfrac{S_n}{S_n+n^2+n}$是一個定值，試證明：$\langle a_n \rangle$必不為等比數列。

2. 今空間中位於平面 F 上的一正ΔABC在另一平面 E 上的投影為$\Delta A'B'C'$，已知$\Delta A'B'C'$之三邊長分別為$\overline{A'B'}=4$、$\overline{A'C'}=3$、$\overline{B'C'}=2\sqrt{6}$，若 θ 表平面 E 與平面 F 之夾角，則 $\cos\theta=$？

3. 已知 a,b 為 $x^2+\dfrac{x^2}{(x+1)^2}=1$的兩個相異實根，試求 ab。