# 國立臺南第二高級中學
# 113學年度第一次教師甄選

# 數學科
# 試題與參考答案

作答注意事項

1. 本試題共兩部分：填充題 12 題，及計算證明題 4 題，共計100分；
2. **作答限用藍色、黑色原子筆或鋼筆，填充題請在答案卷上標註題號及答案，計算證明題請標示題號後將演算過程寫在答案卷上，但繪圖時得使用黑色鉛筆。**
3. 本科(不)可以使用電子計算器。

# 國立臺南第二高級中學113學年度第一次教師甄選數學科試題

## 一、填充題（每題5分，共60分）（只需將答案寫在答案卷上，並註明題號）

1. 已知$\Delta ABC$之重心、內心分別為$G$、$I$，且$\overline{BC}=42$，$\overline{AB}>\overline{AC}$。若$\overline{GI}=2$且$\overline{GI}\parallel\overline{BC}$，

   $\overrightarrow{AI}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求數對$(x,y)=$______。

2. 已知$x,y\ge 1$且$(\log_2 x)^2+(\log_2 y)^2=\log_2(4x^4)+\log_2(8x^8)$，若$\log_2(xy)$的最大值為$M$、最小值為$m$，求$M+m=$_________。

3. 在複數平面上，複數$z$滿足$|z|=1$且$\left|-1+\sqrt{3}i-z\right|=\left|\dfrac{(-1+\sqrt{3}i)^2}{2}-\overline{z}^3\right|$，其中$i=\sqrt{-1}$。

   若$Arg(z)\le Arg(-1+\sqrt{3}i)$，則複數$z=$_________。

4. 已知正數$a$、$b$滿足$a+b=2$，試求$\sqrt{4a+\dfrac{1}{3}}+\sqrt{6b+\dfrac{1}{5}}$的最大值為_________。

5. 設$f(x)=\int_0^x g(t)dt+1$，$g(x)=12x^2-6x+\int_0^1[f(t)+g'(t)]dt$，求$g(0)=$_________。

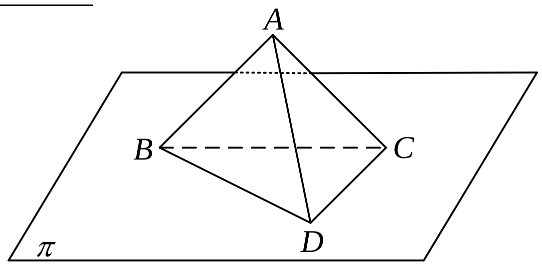
6. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{1}+\sqrt{8}+\sqrt{27}+\cdots+\sqrt{n^3})^2}{n^5}=$_________。

7. 投擲一個六面分別刻上 1, 1 ,1, 2, 2, 3 的公正骰子$n$次，則點數和為偶數的機率為______。

8. 以$x^3+2x^2+2x+1$除$x^{2024}-2x^{427}+3x^{113}-4x$所得的餘式為_______。

9. 設$x$為實數，則$\sqrt{x^4-4x^2-12x+25}+\sqrt{x^4+2x^2+1}$的最小值為_______。

10. 如圖，在平面$\pi$上有一直角三角形，其中$\angle BCD=90^\circ$，$\angle CBD=30^\circ$，另一個等腰直角△$ABC$所在的平面垂直於平面$\pi$，其中$\angle BAC=90^\circ$，若$\overline{CD}=4$，求$\overleftrightarrow{AD}$與$\overleftrightarrow{BC}$間的距離為_______。



11. $\sum_{k=1}^{10} 3^{k-1}\cdot 2^{9-k}\cdot k^2 C_k^{10} =$ ________ 。

12. 在$\triangle ABC$ 中，已知$\dfrac{a+b}{a}=\dfrac{\sin B}{\sin B-\sin A}$ ，且$\cos(A-B)+\cos C=1-\cos 2C$ ，則

$\dfrac{a+c}{b}=$________ 。

**二、計算證明題（每題 10 分，共 40 分）（需將演算過程寫在答案卷上，並註明題號）**

1. 設 $n$ 是正整數，$A=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 2\\ -1 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix}$，試計算$A^n$ 。

2. 設△$ABC$ 的三邊長為$a,b,c$ ，面積記為△ ，試證明：$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{\triangle}\ge 4\sqrt{3}$ 。

3. 以$O$為原點的$xy$平面上，取二點$A(\sqrt{3},1)$ ，$B(-1,\sqrt{3})$ ，$t\in R$ ，點$P$滿足

$\overrightarrow{OP}=t^2\,\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OB}$ ，求$P$點的軌跡與$x$軸所圍成的圖形的面積。

4. 設△$ABC$外接圓的半徑為$R$ ；內切圓的半徑為$r$ ；外心為$O$ ；內心為$I$ ，試證：

$\overline{OI}^2=R^2-2Rr$ 。

# 國立臺南第二高級中學 113 學年度第一次教師甄選數學科參考答案

**一、填充題（每題 5 分，共 60 分）**

1. $(\frac{2}{7},\frac{8}{21})$
2. $6+\sqrt{5}+\sqrt{82}$
3. 1 或 $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
4. $\sqrt{\frac{127}{6}}=\frac{\sqrt{762}}{6}$
5. 14
6. $\frac{4}{25}$
7. $\frac{1}{2}\left(1+(-\frac{1}{3})^n\right)$
8. $-2x^2-12x-6$
9. 5
10. $\frac{4}{7}\sqrt{21}$
11. 62500000
12. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

**二、計算證明題（每題 10 分，共 40 分）**

略